КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 8.

Задача 1. Построить таблицу истинности для заданной формулы.

1. $\bar{x}_2 \to (\bar{x}_1 \vee x_2)\bar{x}_3$.

Решение:

Таблица истинности

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	$(\bar{x}_1 \vee x_2)\bar{x}_3$	$\bar{x}_2 \to (\bar{x}_1 \vee x_2)\bar{x}_3$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1

Задача 2. Преобразовать данную формулу так, чтобы она содержала только операции тесного отрицания, дизъюнкции и конъюнкции. Пользуясь свойствами операций дизъюнкции и конъюнкции, привести формулу к виду, не содержащему скобок.

2. $\bar{x}_3 \sim \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)}\bar{x}_3$.

Решение:

Используем свойство операций эквивалентности и импликации, законы де Моргана, закон двойного отрицания, закон исключенного третьего и законы дистрибутивности.

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}_3 \sim \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)}\bar{x}_3 = \left(\bar{x}_3 \to \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)}\bar{x}_3\right)\left(\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)}\bar{x}_3 \to \bar{x}_3\right) = \\
&= \left(\bar{\bar{x}}_3 \vee \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)}\bar{x}_3\right)\left(\overline{\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)}\bar{x}_3} \vee \bar{x}_3\right) = \left(x_3 \vee \left(\bar{\bar{x}}_1\bar{x}_2\right)\bar{x}_3\right)\left(\overline{\left(\bar{\bar{x}}_1\bar{x}_2\right)\bar{x}_3} \vee \bar{x}_3\right) = \\
&= (x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \wedge \left(\overline{(x_1\bar{x}_2)\bar{x}_3} \vee \bar{x}_3\right) = (x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3)\left(\overline{(x_1\bar{x}_2)} \vee \bar{\bar{x}}_3 \vee \bar{x}_3\right) = \\
&= (x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \wedge \left(\left(\bar{x}_1 \vee \bar{\bar{x}}_2\right) \vee x_3 \vee \bar{x}_3\right) = (x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_3) = \\
&= (x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee 1) = (x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \wedge 1 = x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \\
&= (x_3 \vee x_1)(x_3 \vee \bar{x}_2)(x_3 \vee \bar{x}_3) = (x_3 \vee x_1)(x_3 \vee \bar{x}_2) \wedge 1 = \\
&= (x_3 \vee x_1)(x_3 \vee \bar{x}_2) = x_3 \vee x_1\bar{x}_2
\end{aligned}
$$

Задача 3. Из колоды в 36 карт вынимают n = 7 карт. Указать число наборов, содержащих ровно m = 2 карт бубновой масти и k = 4 карт пиковой масти. Рассмотреть случаи выбора с возвращением и без возвращения.

3. Производится упорядоченный выбор. n = 7, m = 2, k = 4.

Решение:

Предположим, что выбранные карты раскладываются в упорядоченный ряд, состоящий из 7 мест.

Число вариантов раскладки в этом ряду 2-х любых карт бубновой масти равно $C_7^2 = \dfrac{7!}{2!5!} = \dfrac{6 \cdot 7}{2} = 21.$

На оставшиеся 5 мест можно положить 4 любые карты пиковой масти пятью способами, т.к. $C_5^4 = \dfrac{5!}{4!1!} = 5$.

После этого остаётся одно место для любой карты остальных 2-х мастей.

Следовательно, выбор мест для карт осуществляется $21 \cdot 5 = 105$ способами.

Теперь надо подсчитать число вариантов раскладки на этих местах нужных карт.

1) Рассмотрим случай выбора с возвращением.

На выбранные места для карт бубновой масти можно положить любую из 9-ти таких карт. Следовательно, вариантов раскладки карт бубновой масти на 2 предназначенных для них места существует $9^2 = 81$.

Аналогично, вариантов раскладки карт пиковой масти на 4 предназначенных для них места существует $9^4 = 6561$.

На оставшееся одно свободное место можно положить любую из остальных 18-ти карт другой масти.

Таким образом, число наборов, содержащих ровно 2 карт бубновой масти и 4 карт пиковой масти в случае выбора с возвращением равно $105 \cdot 9^2 \cdot 9^4 \cdot 18 = 1\,004\,423\,490$.

2) Рассмотрим случай выбора без возвращения.

На 1-е выбранное место для карт бубновой масти можно положить любую из 9-ти таких карт. На 2-е выбранное место можно положить любую из оставшихся 8-ми таких карт. Следовательно, вариантов раскладки карт бубновой масти на 2 предназначенных для них места без возвращения существует $9 \cdot 8 = 72$.

Аналогично, вариантов раскладки карт пиковой масти на 4 предназначенных для них места существует $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

На оставшееся одно свободное место можно положить любую из остальных 18-ти карт другой масти.

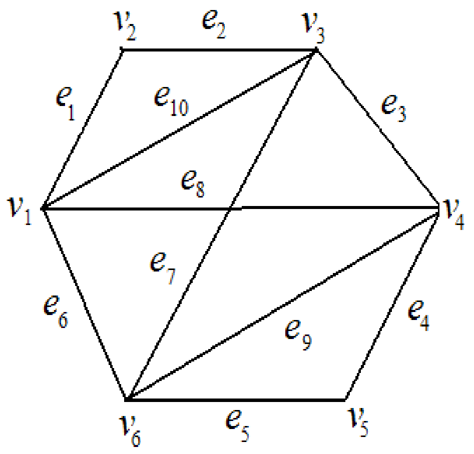
Таким образом, число наборов, содержащих ровно 2 карт бубновой масти и 4 карт пиковой масти в случае выбора без возвращения равно $105 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 18 = 105 \cdot 72 \cdot 3024 \cdot 18 = 411\,505\,920$.

Этот же результат можно получить по-другому.

Из 9-ти карт бубновой масти можно выбрать 2 карты $C_9^2 = \frac{9!}{2!7!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ способами.

Из 9-ти карт пиковой масти можно выбрать 4 карты $C_9^4 = \frac{9!}{4!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$ способами. Последнюю карту можно выбрать 18-ю способами. Следовательно, число неупорядоченных наборов (без повторений) равно $36 \cdot 126 \cdot 18 = 81648$. Вариантов упорядочения этих наборов из 7-ми карт равно $7! = 5040$. Таким образом, число упорядоченных наборов равно $81648 \cdot 5040 = 411\,505\,920$.

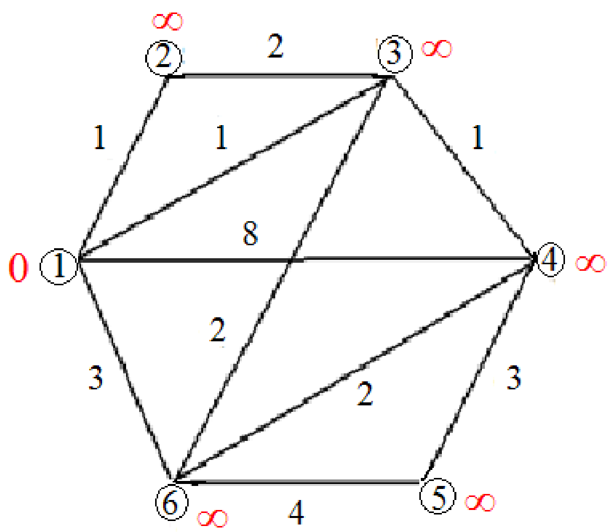
Задача 4. Пользуясь алгоритмом Дейкстры, найти кратчайшие расстояния из вершины v_1, неориентированного взвешенного графа в другие вершины графа. Указать кратчайший маршрут из вершины v_1, в вершину v_4.



e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	1	3	4	3	2	8	2	1

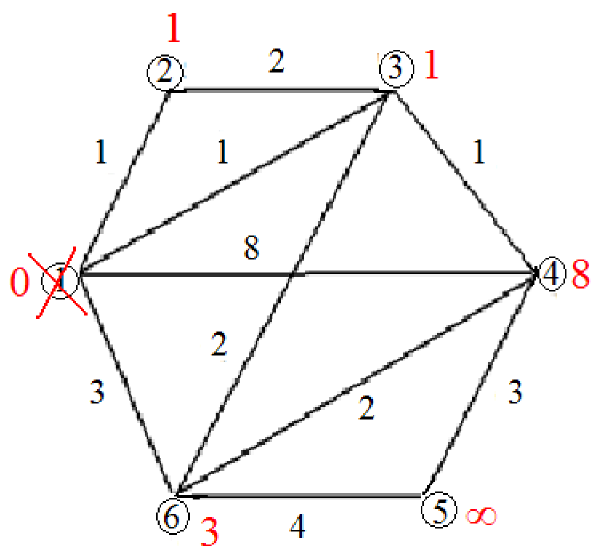
Решение:

Обозначим вершины графа номерами и расставим данные длины рёбер на графе. Рядом с каждой вершиной красным обозначена метка — длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины 1. На начальном этапе все вершины, кроме 1-ой, имеют метку **∞**, а 1-ая вершины имеет метку 0.

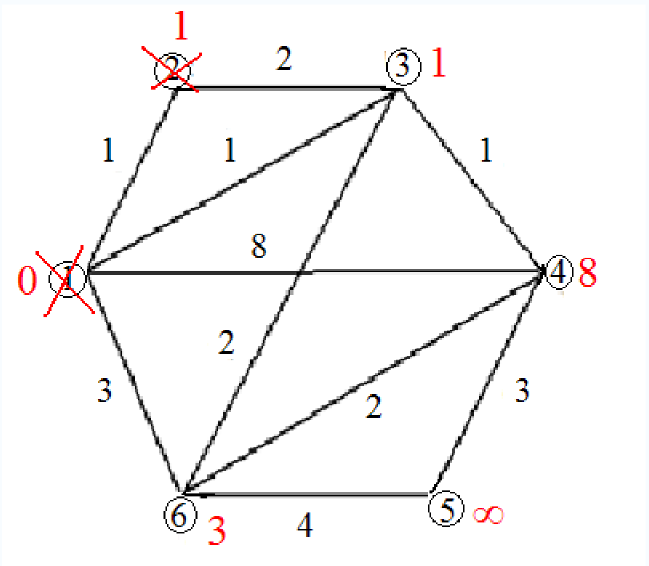


Первый шаг. Минимальную метку имеет вершина 1. Её соседями являются вершины 2, 3, 4 и 6. Расставляем у этих вершин метки, равные длинам путей до них от вершины 1.

Все соседи вершины 1 просмотрены – вычёркиваем её.



Второй шаг. Находим ближайшую к 1-ой из непосещенных вершин. Это вершины 2 и 3 с меткой 1. Выбираем любую, например, вершину 2. Соседней вершиной для 2 является только вершина 3 (т.к. вершина 1 уже вычеркнута), которая имеет метку 1. Т.к. 1 + 2 > 1, не меняем эту метку. Все соседи вершины 2 просмотрены – вычёркиваем её.

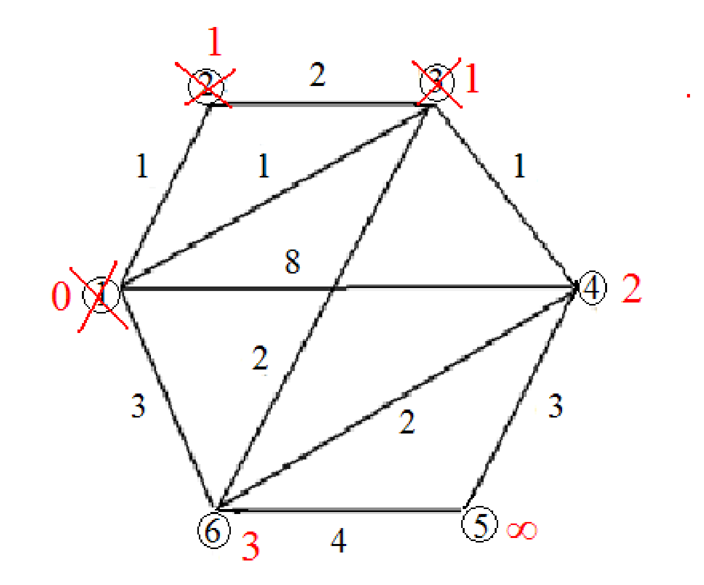


Третий шаг. Выбираем теперь вершину 3 с соседями 4 и 6 (т.к. вершины 1 и 2 уже вычеркнуты), которая имеет метку 1.

Для вершины 4 имеем 1 + 1 < 8, меняем метку 8 на 2.

Для вершины 6 имеем 1 + 2 = 3, не меняем метку.

Вычёркиваем вершину 3 как просмотренную.

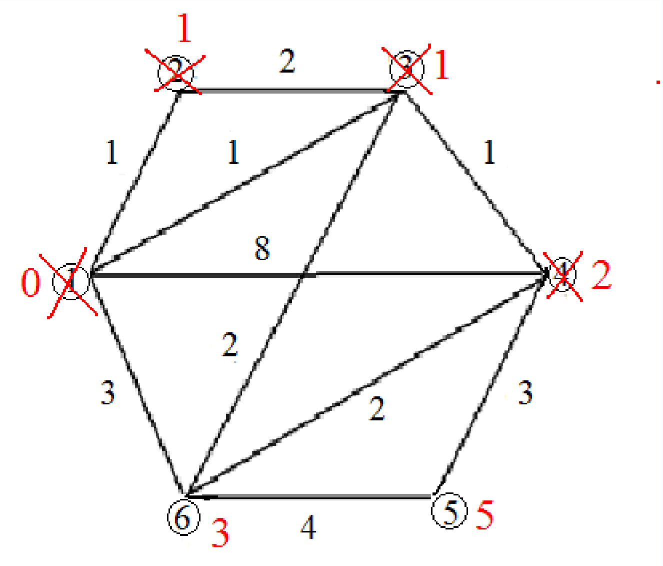


Четвёртый шаг. Ближайшей к 3-ей из невычеркнутых является вершина 4, которая имеет метку 2. Выбираем её. Соседями для неё являются вершины 5 и 6.

Для вершины 5 имеем $2 + 3 < \infty$, меняем метку ∞ на 5.

Для вершины 6 имеем $2 + 2 = 4 > 3$, не меняем метку.

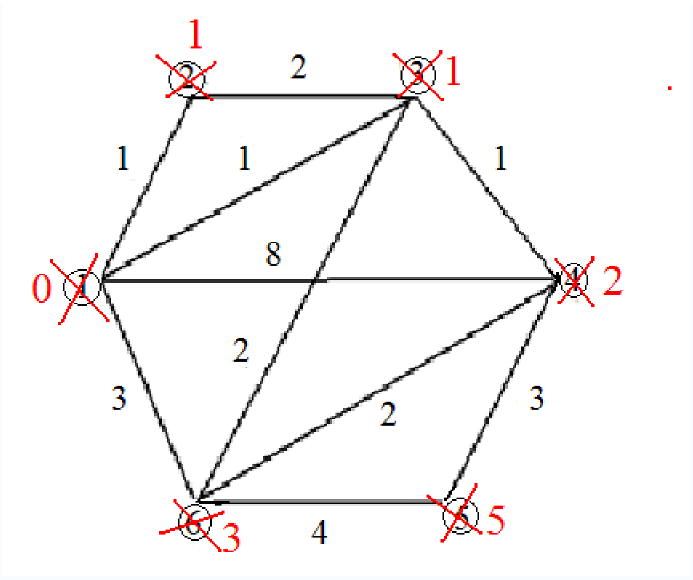
Вычёркиваем вершину 4 как просмотренную.



Пятый шаг. Ближайшей к 4-ой из невычеркнутых является вершина 6, которая имеет метку 3. Соседней для неё является только вершина 5.

Для вершины 5 имеем $3 + 4 > 5$, метку не меняем.

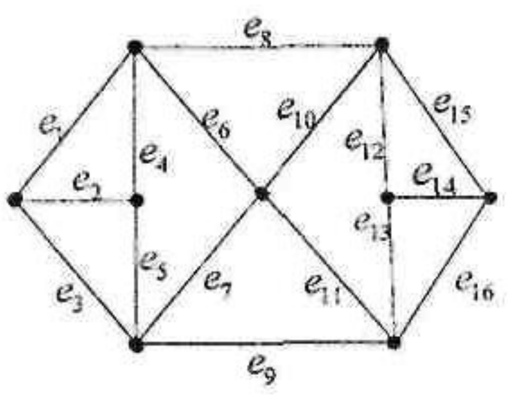
Вычёркиваем вершину 6 как просмотренную и вычёркиваем последнюю 5-ую вершину, т.к. у неё уже нет соседей.



Завершение выполнения алгоритма. Алгоритм заканчивает работу, когда вычеркнуты все вершины. Результат его работы виден на последнем рисунке: кратчайший путь от вершины 1 до 2-й составляет 1, до 3-й — 1, до 4-й — 2, до 5-й — 5, до 6-й — 3.

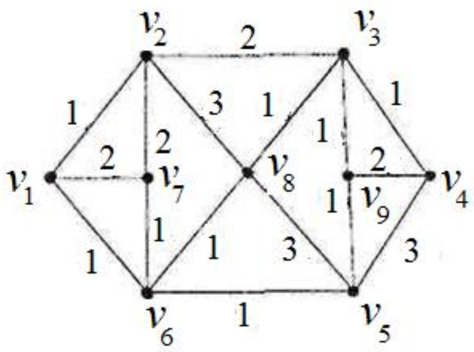
Кратчайший маршрут из вершины v_1 в вершину v_4 проходит через вершину v_3 и равен 2: { v_1, v_3, v_4} – кратчайший маршрут из v_1 в v_4.

Задача 5. Схема дорог, соединяющих населенные пункты, задана графом, показанным на рисунке. В таблице каждому ребру графа поставлен в соответствие вес, характеризующий стоимость прокладки дороги, соединяющей данные населенные пункты. При помощи алгоритма Краскала построить схему дорог, соединяющих данные населенные пункты, при наименьшей стоимости проекта.

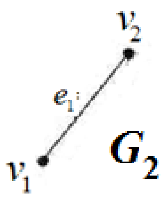


e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

Решение:



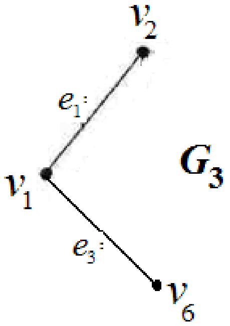
1. Выбираем в графе G ребро минимальной длины и строим граф G_2, состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин. Выберем ребро e_1 длиной 1.



Так как число вершин графа G равно 9, а число вершин в графе G_2 $i = 2 < 9$, продолжаем построение.

2. Строим следующий граф G_3, добавляя к графу G_2 новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно одной из вершин v_1, v_2 графа G_2 и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не содержащейся в G_2, т.е. выбираем минимальное из рёбер e_2, e_3, e_4, e_6, e_8.

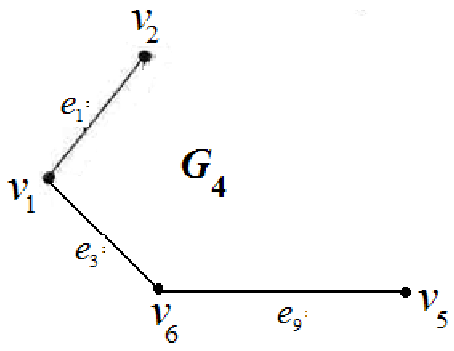
Выбираем ребро e_3 длиной 1. Вместе с этим ребром включаем в G_3 и инцидентную ему вершину v_6.



Так как $i = 3 < 9$, продолжаем построение.

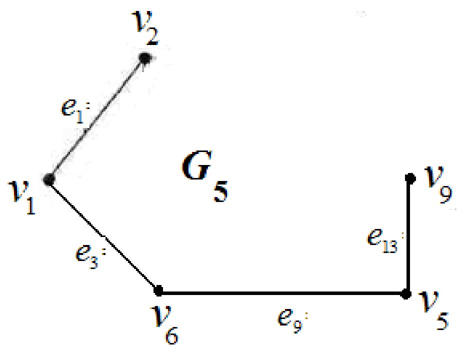
3. Строим следующий граф G_4, добавляя к графу G_3 новое ребро минимальной длины, выбранное среди рёбер e_2, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9. Выбираем ребро e_9 длиной 1.

Вместе с этим ребром включаем в G_4 и инцидентную ему вершину v_5.



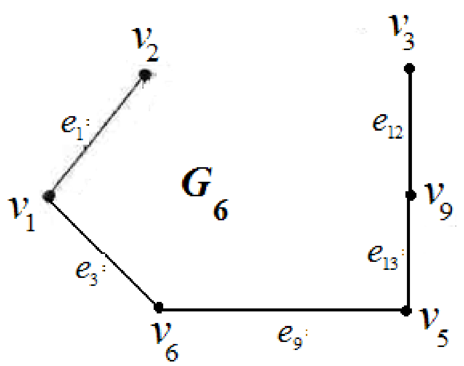
Так как $i = 4 < 9$, продолжаем построение.

4. Строим следующий граф G_5, добавляя к графу G_4 новое ребро минимальной длины, выбранное среди рёбер e_2, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{11}, e_{13}, e_{16}. Выбираем ребро e_{13} длиной 1. Вместе с этим ребром включаем в G_5 и инцидентную ему вершину v_9.



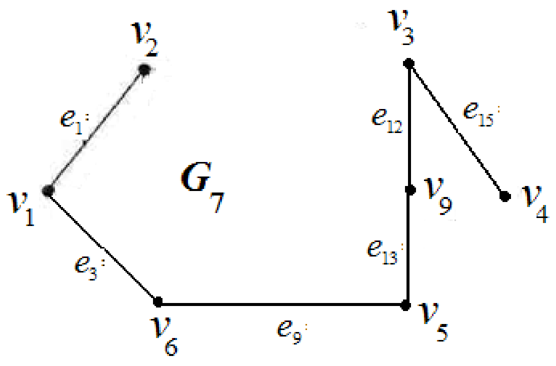
Так как $i = 5 < 9$, продолжаем построение.

5. Строим следующий граф G_6, добавляя к графу G_5 новое ребро минимальной длины, выбранное среди рёбер e_2, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}. Выбираем ребро e_{12} длиной 1. Вместе с этим ребром включаем в G_6 и инцидентную ему вершину v_3.



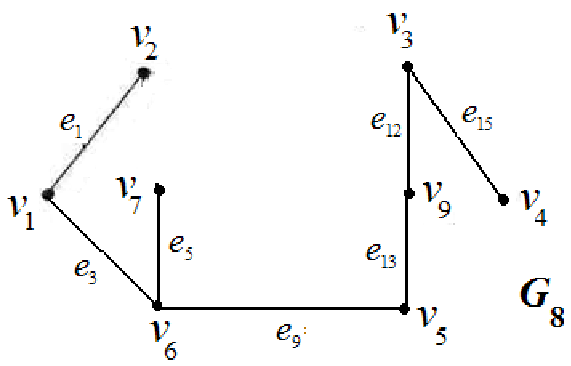
Так как $i = 6 < 9$, продолжаем построение.

6. Строим следующий граф G_7, добавляя к графу G_6 новое ребро минимальной длины, выбранное среди рёбер e_2, e_4, e_5, e_6, e_7, e_{10}, e_{11}, e_{14}, e_{15}, e_{16}. Выбираем ребро e_{15} длиной 1.Вместе с этим ребром включаем в G_7 и инцидентную ему вершину v_4.



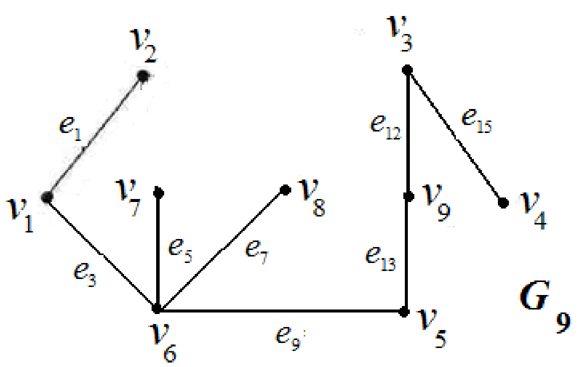
Так как $i = 7 < 9$, продолжаем построение.

7. Строим следующий граф G_8, добавляя к графу G_7 новое ребро минимальной длины, выбранное среди рёбер e_2, e_4, e_5, e_6, e_7, e_{10}, e_{11}. Выбираем ребро e_5 длиной 1. Вместе с этим ребром включаем в G_8 и инцидентную ему вершину v_7.



Так как $i = 8 < 9$, продолжаем построение.

8. Строим следующий граф G_9, добавляя к графу G_8 новое ребро минимальной длины, выбранное среди рёбер e_6, e_7, e_{10}, e_{11}. Выбираем ребро e_7 длиной 1. Вместе с этим ребром включаем в G_9 и инцидентную ему вершину v_8.



Так как $i = 9$, построение закончено и граф G_9 – минимальное остовное дерево. Т.к. вес каждого рёбра графа G_9 равен 1, суммарная длина рёбер равна 8.

Таким образом, схема дорог, соединяющих данные населенные пункты, при наименьшей стоимости проекта может быть выбрана в виде графа G_9.

Задача 6. Выяснить, применима ли машина Тьюринга, заданная программой P к слову S,и если применима, то указать результат применения машины Тьюринга к данному слову.

$$6.\ P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_3 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_0 \\ q_2 1 \to 0Rq_3 \\ q_3 0 \to 0q_3 \\ q_3 1 \to 1Lq_3 \end{cases}; \quad S = 111101.$$

Решение:

Начальная конфигурация:

1	1	1	1	0	1
q_1					

1) $q_1 1 \to 1Rq_2$ (записывает в ячейку единицу, сдвигается вправо и переходит в состояние q_2)

1	1	1	1	0	1
	q_2				

2) $q_2 1 \to 0Rq_3$ (записывает в ячейку ноль, сдвигается вправо и переходит в состояние q_3)

1	0	1	1	0	1
		q_3			

3) $q_3 1 \to 1Lq_3$ (записывает в ячейку единицу, сдвигается влево и остаётся в состоянии q_3)

1	0	1	1	0	1
	q_3				

4) $q_3 0 \rightarrow 0 q_3$(записывает в ячейку ноль, остаётся на месте и в том же состоянии q_3)

1	0	1	1	0	1
	q_3				

На этом этапе работа машины зацикливается. В работе машины ни в один из моментов не реализуется команда с заключительным состоянием q_0, поэтому процесс вычисления будет бесконечным.

Следовательно, машина Тьюринга, заданная программой P, не применима к слову S = 111101.